DRE-SAVANES **Année scolaire : 2022-2023**

Classe : $\boldsymbol{T^{le}D}$
Durée : 4h , coef :3

COMPOSITION DU PREMIER SEMESTRE
EPREUVE DE MATHEMATIQURES

Exercice 1 (3pts)

1) choisis l'unique bonne réponse dans chacun des cas suivants en écrivant juste le numéro correspondant. (0,5pt pour chaque réponse juste)

   1.1. L'ensemble de définition de la fonction f(x)= $\frac{x\ln(-x)}{x+1}$ est l'intervalle :

   a) $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$, b) $]-\infty\,;-1[\cup]-1\,;0[$, $c)$ $]-1\,;0[\cup]0\,;+\infty[$.

   1.2. La limite en 0 de la fonction $f(x)=\frac{\ln(1+sinx)}{x}$ est égale à :

   a) 0 ; b) 2 ; c) 1

   1.3 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u};\ \vec{v}\ )$. Soient les points A, B, C et D d'affixes respectives $1+2i; 1+\sqrt{3}+i; 1+\sqrt{3}-i\ \ et\ 1-2i.$

   Choisis la bonne réponse :

   a) Les droites (AB) et (DB) sont parallèles
   b) $|Z_D - Z_A| = 16$
   c) Les droites (AB) et (DB) sont perpendiculaires

2) Répond par vrai ou faux aux affirmations suivantes.

   2.1. La forme trigonométrique de $\sqrt{2}+i\sqrt{6}\ est\ égale$ à $2\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{3}}$

   2.2. La forme algébrique de $(1-i\sqrt{3})^4\ est\ 8-8i\sqrt{3}$

   2.3. L'expression $ie^{\frac{i\pi}{6}}$ est égale à $\left[e^{\frac{i\pi}{3}}\right]^2$

Exercice 2 (5pt)

On considère l'équation (E) : z ∈ C $Z^4+\ (3-2i)z^3+$ (2-3i)z^2+ (3-2i)z + 1-3i = O

1) a) Vérifier que i et –i sont solutions de (E)

b) Déterminer les nombres complexes $\beta\ et\ \gamma$ tels que :

∀ z∈ C, z^4+(3-2i)z^3+(2-3i)z^2+(3-2i)z +1-3i = $(z^2+1)(z^2+\beta z+\gamma)$

   c) En déduire les solutions de (E).

2) Dans le plan complexe rapporté a un repère orthonormé (o ;$\vec{u};\vec{v}$), on désigne par A, B ;C et D les points d'affixes Z_A = - i ; Z_B = i ; Z_C = - 1+i et Z_D= -2 +i

   a) Placer les points A ;B ;Cet D dans le repère (o ;$\vec{u}$;$\vec{v}$)
   b) Calcule $\frac{Z_{B-}\ Z_A}{Z_{B-}\ Z_D}$ et $\frac{Z_{B-}Z_D}{Z_{B-}Z_C}$. En déduire qu'il existe une rotation r et une homothétie h transformant respectivement D en A et C en D .

3) On considère la transformation plane S définie par :S = roh.

   a) Quelle est l'image de C par S ?
   b) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de S.

Problème (11,5pts)

A) Soit la fonction g définie sur IR par g(x) = 2x- $\sqrt{1+x^2}$.

   1) a- Démontrer que $\forall x\in IR$,2$\sqrt{1+x^2}$ - x $> o$ (0,5pt)

      b-Etudier les variations de la fonction g . (2pts)

   2) a- Montrer que l'équation g(x) = o admet une solution unique ∝ dans IR. (0,5pt)

      b- Vérifier que $\propto=\frac{\sqrt{3}}{3}$. (0,5pt)

      c- Déduire le signe de la fonction g sur IR. (0,5pt)

B) Soit la fonction f définie sur IR par :f(x) = 2$\sqrt{1+x^2}$-x et (Cf) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (o ;$\vec{\imath}$;$\vec{\jmath}$). On note (D) et (D') les droites d'équations respectives y = -3x et y = x.

1) Etudier les limites de f en +∞ $et\ en - \infty$. (0,75pt)
2) Montrer que pour tout réel x, f'(x) = $\frac{g(x)}{\sqrt{1+X^2}}$. (0,75pt)
3) Dresser le tableau de variation de f. (0,5pt)
4) a- Démontrer que les droites (D) et (D') sont des asymptotes à la courbe (Cf) respectivement en -∞et en +∞. (1pt)
   b- Préciser les positions relatives de (Cf) par rapport aux droites (D) et (D'), (1pt)
5) Tracer la courbe (Cf) et ses asymptotes. (1,5pt)
6) Soit h la restriction de f à l'intervalle $]-\infty;\alpha]$
   a- Démontrer que h est une bijection de $]-\infty;\alpha]$ sur un intervalle J que l'on déterminera. (0,5pt)
   b- On note h^{-1} la bijection réciproque de h, Calculer h(o) et $(h^{-1})'(2)$ (1pt)
   c- Construire (Ch), la courbe représentative de la fonction h^{-1} dans le même que (Cf). (0,5pt)