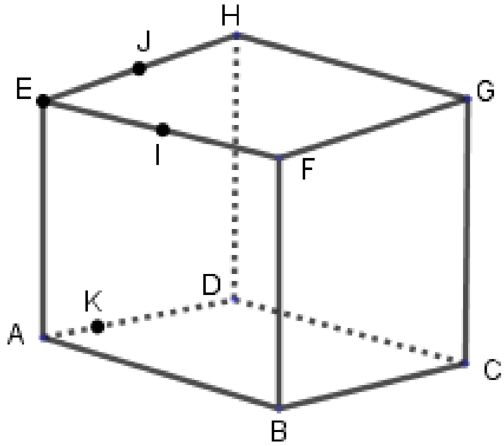
DRE-SAVANES IESG DAPAONG	***Composition régionale du premier semestre*** *Epreuve de mathématiques*	Année scolaire:2022-2023 Classe: TC_4 Durée:04H / Coef:5

Fev 2022

EXERCICE 1 $(06,5\ points)$

Les parties A , B et C peuvent être traitées de manière indépendante.



On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur 1, dont la figure est donnée ci-contre.
On note I le milieu du segment $[EF]$, J le milieu du segment $[EH]$ et K le point du segment $[AD]$ tel que $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.
On note $\mathcal{P}$ le plan passant par I et parallèle au plan (FHK).
On munit l'espace du repère orthonormé direct $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

Partie A

Soit a un nombre réel non nul strictement positif. L, M et K sont les points définis par:
$\overrightarrow{AL} = a\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CK} = a\overrightarrow{CG}$.

1.a°) Détermine les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{EM} \wedge \overrightarrow{EL}$. $(0,5pt)$
b°) Déduis l'aire du triangle ELM. $(0,25pt)$
c°) Démontre que la droite (AK) est perpendiculaire au plan (ELM). $(0,5pt)$
2°) On note N le projeté orthogonal de A sur le plan (ELM).
a°) Justifier que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AK}$. $(0,5pt)$
b°) Démontre qu'il existe un nombre λ tel que $\overrightarrow{AN} = \lambda\overrightarrow{AK}$. $(0,25pt)$
c°) Démontre que: $\lambda = \dfrac{a}{a^2+2}$. En déduire que $N \in [AK]$. $(0,75pt)$
d°) Démontre que $NK = \dfrac{a^2-a+2}{\sqrt{a^2+2}}$. $(0,5pt)$
3°) A l'aide des questions précédentes, détermine le volume du tétraèdre $ELMK$. $(0,5pt)$

Partie B

1°) Le plan (FHK) coupe la droite (AE) en un point qu'on note P.
Construis le point P. $(0,25pt)$
Construis la section du cube par le plan $\mathcal{P}$. $(0,25pt)$

Partie C

Dans cette partie, on munit l'espace du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.
On rappelle que $\mathcal{P}$ est le plan passant par I et parallèle au plan (FHK).
1.a°) Montre que le vecteur $\vec{n}(4; 4; -3)$ est un vecteur normal au plan (FHK). $(0,5pt)$
b°) Déduis qu'une équation cartésienne du plan (FHK) est: $4x + 4y - 3z - 1 = 0$. $(0,25pt)$
c°) Détermine une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$. $(0,25pt)$
d°) Calcule les coordonnées du point M', point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite (AE). $(0,25pt)$
2°) On note (Δ) la droite passant par le point E et orthogonale au plan $\mathcal{P}$.
a°) Détermine une représentation paramétrique de la droite (Δ). $(0,25pt)$
b°) Détermine une équation cartésienne du plan (ABC). $(0,25pt)$
c°) Calcule les coordonnées du point O,point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC). $(0,25pt)$
d°) Trace la droite (Δ) sur la figure ci-dessus. $(0,25pt)$

EXERCICE 2 $(03,5\ points)$

Le plan complexe est muni d'un repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Pour tout nombre complexe λ, on considère l'application

f_λ du plan dans lui-même, qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que: $z' = (\lambda + 2i)z + (1 - \lambda i)\overline{z}$.

1°) Pour quelle valeur de λ, f_λ est-elle: une similitude directe? une similitude indirecte? $(0,5pt)$

2°) Précise dans chaque cas, la nature et les éléments caractéristiques de f_λ. $(1pt)$

On suppose dans la suite de l'exercice que λ ***est un nombre réel*** .

3.a°) Ecris l'expression analytique de f_λ. $(0,5pt)$

b°) Déduis-en que f_λ est une transformation affine. $(0,25pt)$

4°) Donne suivant les valeurs de λ, l'ensemble des points invariants par f_λ. $(0,75pt)$

5°) On pose $\lambda = 2$ et on désigne par (D_m) la droite d'équation $3x - 4y = m$ où m est un nombre réel. Montre que $f_2(D_m)$ est une droite dont on déterminera une équation. $(0,5pt)$

PROBLEME (10 *points*)

A. On considère la fonction f définie par:

$$\begin{cases} f(x) = (1 - e^{-x})ln(x) - 1; si\ x\ \in]0;1] \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1. Démontre que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - e^{-x}}{x} = 1$ $(0,25pt)$

2. Démontre que f est continue sur $[0;1]$. $(0,25pt)$

3. Etudie la dérivabilité de f sur $[0;1]$ et montre que pour tout x de $]0;1]$, $f'(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}(xlnx + e^x - 1)$. $(1pt)$

4. Soit g la fonction numérique définie sur $]0;1]$ par $g(x) = xlnx + e^x - 1$.

4.1. Calcule $g''(x)$. $(0,75pt)$

4.2. Etudie le sens de variation de g' et démontre qu'il existe une unique valeur x_0 de $]0;1]$ qui annule g'. (Tu ne calculeras pas x_0). $(0,5pt)$

4.3. Déduis le signe de $g'(x)$. $(0,5pt)$

4.4. Etudie le sens de variation de g puis montre que $g(x_0) = -(ln(x_0) - 1)^2$. $(0,75pt)$

4.5. Dresse le tableau de variation de g. $(0,5pt)$

4.6. Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution x_1 dans l'intervalle $]0;1]$ et vérifie que $x_0 < x_1 \leq 1$. $(0,5pt)$

4.7. Déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x. $(0,5pt)$

5. Dresse le tableau de variation de f. $(0,5pt)$

6. Construis la courbe $(\mathcal{C})$ de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). (***Unité graphique : 10 cm***); on prendra $x_1 = 0,31$. $(0,5pt)$

B. Soit n un entier naturel, on définit sur $[0;1]$ les fonctions φ_i , $i \in \mathbb{N}$ par:

$\varphi_0(x) = 1$; $\varphi_1(x) = 1 - x$; $\varphi_2(x) = 1 - x + \dfrac{x^2}{2!}$ et pour tout entier n strictement supérieur à 2,

$\varphi_n(x) = 1 - x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^n}{n!}$.

1°) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x de $[0;1]$, on a $\varphi_n(x) = \varphi_{n-1}(x) + (-1)^n \dfrac{x^n}{n!}$. $(0,75pt)$

2°) On se propose de démontrer que pour tout entier naturel n et pour tout réel x de $[0;1]$, on a $\varphi_{2n+1}(x) \leq e^{-x} \leq \varphi_{2n}(x)$.

2.1. Soient ϕ et ψ deux fonctions continues sur $[0;1]$ et dérivables sur $]0;1]$ telle que : $\phi(0) = \psi(0)$. $(0,75pt)$

Démontrer que si pour tout réel x de $]0;1]$, $\phi'(x) \leq \psi'(x)$ alors pour tout réel x de $[0;1]$, $\phi(x) \leq \psi(x)$.

2.2. Démontrer par récurrence et en utilisant deux fois la question 2.1°) que pour tout entier naturel n et pour tout réel x de $[0;1]$, on a $\varphi_{2n+1}(x) \leq e^{-x} \leq \varphi_{2n}(x)$. $(1,25pt)$

2.3 Pour tout entier naturel n, déduire de la question précédente un encadrement de la fonction g sur $]0;1]$ faisant intervenir les fonctions φ_{2n} et φ_{2n+1} $(0,75pt)$.

.... ***Bonne réflexion!*** ....§