$DRE - SAVANES$ $Année\ scolaire$ $2022-2023$	$Compositon\ Régionale$ $du\ Premier\ Semestre$ $Epreuve\ de\ mathématiques$	$Classe : 1^{ère}C_4$ $Durée : 04\ heures$ $Coéfficient: 05$

Exercice :1 (03,75 points)

L'unité de longueur est le cm. Soit ABC un triangle isocèle en A tel que : $AB = AC = 5$; $BC = 6$ et $G = bar\{(A;2),(B;3),(C;3)\}$.

1. a. Faire une figure. **(0,25 pt)**

   b. Utiliser la propriété d'Alkashi pour déterminer $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$. **(0,25 pt)**

   c. En déduire le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$. **(0,25 pt)**

   d. Soit I le milieu du segment $[BC]$.

   Ecrire G comme barycentre des points $A\ et\ I$ et en déduire que $AG = 3$. **(0,5 pt)**

2. Soit f une application du plan dans lui-même qui à tout pont M associe

   $f(M) = 2\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}$

   a. Calculer $f(A)$. **(0,5 pt)**

   b. Montrer que : $f(M) = 4MG^2 + f(G)$. **(0,75 pt)**

3. Soit (γ) l'ensemble des points M du plan tels que : $f(M) = f(A)$.

   a. Déterminer en discutant suivant les valeurs de $f(G)$ la nature de (γ). **(0,75 pt)**

   b. Représenter (γ) sur la figure précédente sachant que $f(G) = 5$. **(0,5 pt)**

Exercice :2 (04,5 points)

1. Vérifier que les égalités : $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ et $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ sont les équations cartésiennes de deux cercles (C) et (C') dont on précisera les éléments caractéristiques. **(1 pt)**
2. Démontrer que (C) et (C') sont sécants en deux points A et B dont on précisera les coordonnées. **(0,75 pt)**
3. Vérifier que le point $H(3;1)$ appartient à (C) puis écrire une équation cartésienne de la tangente (T) à (C) en H. **(0,5 pt)**
4. Démontrer que (C') et (T) sont sécants puis déterminer les coordonnées de leurs points d'intersection E et F. **(1 pt)**
5. Déterminer une représentation paramétrique de la tangente (T). **(0,5 pt)**
6. Soit k un réel, on admet que l'équation $x^2 + y^2 - 2kx - 4ky + 10(k-1) = 0$ est l'équation d'un cercle (C_k).

   Démontrer que pour tout nombre réel x ; (C_k) passe par deux points fixes I et J dont on précisera les coordonnées. **(0,75 pt)**

Exercice :3(03,25 points)

Soit G un point tel que $G = bar\left\{\left(A;\sqrt{5-\sqrt{5}}\cos 3x\right),\left(B;\sqrt{3+\sqrt{5}}\sin 3x\right),\left(C;-\sqrt{2}\right)\right\}$.

On suppose que $x \in [0;2\pi]$. On donne $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$.

1. Calculer $cos^2\left(\frac{3\pi}{10}\right)$; $sin^2\left(\frac{3\pi}{10}\right)$ et en déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)$. **(1 pt)**
2. On pose $A(x) = \sqrt{5-\sqrt{5}}\cos 3x + \sqrt{3+\sqrt{5}}\sin 3x$.

a. Détermine deux réels a et b tels que : $A(x) = a\cos(3x + b)$. **(0,5 pt)**

b. Résoudre l'équation : $x \in [0; 2\pi], A(x) - \sqrt{2} = 0$. **(1pt)**

c. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles G existe. **(0,25 pt)**

3. Pour $x = \frac{\pi}{10}$, montrer que $G = bar\{(A; 5 - \sqrt{5}), (B; 3 + \sqrt{5}), (C; -4)\}$. **(0,5 pt)**

Exercice :4 (06 points)

On considère la fonction numérique à variable x réelle définie par :

$f_m(x) = mx^2 - (2m + 1)x + 2$ où m est un paramètre réel. On désigne par $(\mathcal{C}_m)$ la représentation graphique de la fonction f_m dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. a. Construire les courbes $(\mathcal{C}_0)$ et $(\mathcal{C}_1)$ dans le plan. **(0,75 pt)**

   b. En déduire les coordonnées des points communs à toutes les courbes $(\mathcal{C}_m)$. **(0,5 pt)**

   c. Déterminer l'image directe de l'intervalle $]-\infty; -1]$ et l'image réciproque de l'intervalle $[0; 2]$ par f_1. **(0,5 pt)**

2. On suppose $m \neq 0$.

   Déterminer les coordonnées sommet S_m de la parabole $(\mathcal{C}_m)$ et montrer que lorsque m parcourt $\mathbb{R}^*$ le point S_m décrit un ensemble (Γ) dont on déterminera l'équation. **(0,75 pt)**

3. Déterminer suivant les valeurs de m, le nombre et le signe des racines de la fonction polynôme f_m. **(1,25 pt)**

4. On suppose que f_m admet deux racines α et β.

   a. Déterminer une relation entre α et β, Indépendante de m. **(0,5 pt)**

   b. Calculer α ; β et m sachant que $\alpha + 2\beta = 4$. **(0,75 pt)**

   c. Exprimer les expressions A et B suivantes en fonction de m.

      i. $A = (\alpha - \beta)^2$. **(0,5 pt)**

      ii. $B = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$. **(0,5 pt)**

Exercice :5 (02,5 points)

1. Calculer les limites suivantes

   a. $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} \frac{x^2 - 2x}{3 - x}$. **(0,25 pt)**

   b. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{x - 1}$. **(0,5 pt)**

   c. $\lim\limits_{x \to -\infty} (-5x^3 + 17x^2 - 2x - 5)$. **(0,25 pt)**

   d. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x - 4}{x^2 - 4}$. **(0,5 pt)**

2. Résoudre suivant les valeurs du paramètre réel α le système

   (S) : $\begin{cases} x - \alpha y = -\alpha \\ -\alpha x + y = \alpha \end{cases}$. **(1 pt)**

†††BON TRAVAIL ET BON COURAGE !!!