BAC1 2023 SESSION NORMALE

MATHEMATIQUES SERIE D DUREE : 4H ***Coef : 3***

Exercice 1 (4,5pts)

On considère la suite numérique $(U_n)_{n\in IN}$ définie par $\begin{cases} U_0 = 9 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}(2U_n + 4) \end{cases}$

1. Calcule U_1 et U_2. (0,5pt)

2.1. Démontre par récurrence que la suite (U_n) est minorée par 4. (0,5pt)

2.2. Justifie que pour tout $n \in IN, \frac{1}{3}(4 - U_n) \leq 0$. En déduire que la suite (U_n) est décroissante. (0,5pt)

3. Soit la suite (V_n) définie par : $V_n = aU_n + b$ où a et b sont des nombres réels.

3.1. Quelle est la nature de la suite (V_n) si a = 0 ? (0,25pt)

3.2. Montre que $V_{n+1} = \frac{1}{3}(2V_n + 4a + b)$. (0,5pt)

3.3. Quelle relation existe-t-il entre a et b pour que la suite (V_n) soit géométrique. Pour cette condition, donner la raison de la suite (V_n). (0,5pt)

4. On pose $a = -1$ et $b = 4$

4.1. Vérifie que la suite (V_n) est géométrique. (0,25pt)

4.2. Exprime V_n puis U_n en fonction de n. (0,75pt)

4.3. Exprime en fonction de n : $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_{n-1}$ et $S'_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_{n-1}$. (0,75pt)

Exercice 2 (4,5pts)

1. ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 2 et AC = 4. Pour quelles valeurs de α le système $\{(A, \alpha - 1), (B, \alpha^2), (C, 1 + \alpha)\}$ admet-il un barycentre G_α ? (0,5pt)

Dans la suite de l'exercice, on prendra $\alpha = 2$ et on note G = bar $\{(A, 1), (B, 4), (C, 3)\}$

2. Utilise G pour montrer que l'application f du plan dans lui-même qui au point M associe le point M' tel que $7\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}$ est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport. (0,5pt)

3.1. Montre que $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{8}(4\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AC})$. En déduire CG^2. (0,75pt)

3.2. Calcule de même GA^2 et GB^2. (1pt)

3.3. Montre que pour tout point M du plan, $MA^2 + 4MB^2 + 3MC^2 = 8MG^2 + AG^2 + 4BG^2 + 3CG^2$. (0,5pt)

3.4. Détermine l'ensemble (Γ) des points M du plan tel que $MA^2 + 4MB^2 + 3MC^2 = 64$.

Vérifie que B appartient à (Γ) puis construire (Γ). (1,25pts)

Problème (11pts)

Soit f la fonction numérique à variable réelle x définie par $f(x) = \frac{x^2 - 3|x-2| - 2}{x-1}$; (Cf) sa représentation graphique dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1.1. Détermine l'ensemble de définition D_f de la fonction f. (0,25pt)

1.2. Justifie que pour tout réel x, $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2+3x-8}{x-1}, & si\ x \in]-\infty; 2[\setminus\{1\} \\ f(x) = \frac{x^2-3x+4}{x-1}, & si\ x \in [2; +\infty[\end{cases}$ (1pt)

1.3. Détermine les limites de f aux bornes de D_f. (1pt)

1.4. Etudie la continuité de f au point d'abscisse 2. (0,25pt)

2. On considère la fonction h définie par $h(x) = \frac{f(x) - f(2)}{x-2}$.

2.1. Exprime $h(x)$ pour $x \in]-\infty, 2[\setminus\{1\}$ et pour $x \in]2; +\infty[$. (0,5pt)

2.2. Etudie la dérivabilité de f au point d'abscisse 2. (1pt)

3.1. Détermine l'expression $f'(x)$ de la fonction dérivée de f pour $x \in]-\infty, 2[\setminus\{1\}$ et pour $x \in]2; +\infty[$. (1pt)

3.2. Etudie le signe de $f'(x)$. (1pt)

3.3. Dresse le tableau de variation de f. (0,5pt)

4.1. Ecris $f(x)$ sous la forme $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$ sur chacun des intervalles $]-\infty, 2[\setminus\{1\}$ et $[2; +\infty[$ avec a, b et c des nombres réels à déterminer pour chaque expression de $f(x)$. (1pt)

En déduis que les droites $(D_1) : y = x + 4$ et $(D_2) : y = x - 2$ sont asymptotes à (Cf) respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$. (1pt)

5.1. Etudie la position relative de (Cf) par rapport aux droites (D_1) et (D_2). (1pt)

5.2. Détermine les coordonnées des points d'intersection de (Cf) avec l'axe des abscisses. (0,5pt)

6. Trace (Cf) et ses asymptotes. (1pt)