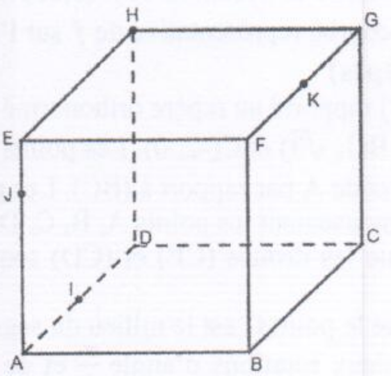
BAC1 2023 SESSION NORMALE

MATHEMATIQUES SERIE C4 DUREE : 4H *Coef : 5*

Exercice 1 : (4pts)

La figure ci-contre représente un cube ABCDEFGH. Les points I, J, K sont définis par les conditions suivantes : I est le milieu de [AD]. $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$. K est le milieu de [FG]. On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



1. Donne les coordonnées des points I, J et K. (0,75pt)

2. Justifie que I, J et K définissent un plan. (0,25pt)

3.1. Détermine les réels a et b tels que le vecteur $\vec{n}(4; a; b)$ soit normal eu plan (IJK). (0,75pt)

3.2. En déduis une équation cartésienne du plan (IJK). (0,5pt)

4. Construis la section du cube par le plan (IJK). (0,5pt)

5. On note R le projeté orthogonal du point F sur le plan (IJK). On définit l'intérieur du cube comme l'ensemble des points *M(x; y; z)* tels que $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \\ 0 < z < 1 \end{cases}$

5.1. Le point R est-il à l'intérieur du cube ? Justifier votre réponse. En déduis la position du point R par rapport à la section construite à la question 4. (0,75pt)

5.2. A quelle distance du sommet F le plan (IJK) traverse le cube ? (0,5pt)

Exercice 2 : (4pts)

On considère la suite $(U_n)_{n\in IN}$ définie par : $U_0 = 1$ et pour tout $n \in IN$, $U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + n - 2$.

1. Calcule U_1, U_2 *et* U_3. (0,75pt)

2.1. Démontre que pour tout entier naturel $n \geq 4,\ U_n \geq 0$ (0,5pt)

2.2. En déduis que pour tout entier naturel $n \geq 5$, $U_n \geq n - 3$. (0,25pt)

2.3. En déduis la limite de la suite (U_n). (0,25pt)

3. On définit la suite $(V_n)_{n\in IN}$ par : $V_n = -2U_n + 3n - \frac{21}{2}$.

3.1. Démontre que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. (1pt)

3.2. En déduis que : pour tout entier naturel *n*, $U_n = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3n}{2} - \frac{21}{4}$. (0,5pt)

4. Soit les sommes définies pour tout entier naturel n par : $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n$ et $S'_n = U_{0+}U_1 + U_2 + \cdots + U_n$. Détermine l'expression de S_n puis celle de S'_n en fonction de n. (0,75pt)

Exercice 3 (4pts)

Soit $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{4sin^2x+3sinx}{sinx+1}$. On désigne par ($C_f$) la courbe représentative de *f* dans un plan muni du repère orthonormé (O, I, J).

1.1. Détermine l'ensemble de définition de *f*. (0,25pt)

1.2. Montre que les droites d'équations $(D): x = \frac{\pi}{2}$ et $(D'): x = \frac{3\pi}{2}$ sont des axes de symétrie de la courbe (C_f) de la fonction. (1pt)

1.3. En déduis que l'ensemble d'étude peut être l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$ puis calcule la limite à gauche de *f(x)* quand *x* tend vers $\frac{3\pi}{2}$. (0,75pt)

T.S.V.P

2.1. Montre que $f'(x) = \frac{cosx(2sinx+3)(2sinx+1)}{(sinx+1)^2}$. (0,5pt)

2.2. Etudie le signe de $f'(x)$ sur $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$. (0,5pt)

2.3. Dresse le tableau de variation de f. (0,25pt)

3. Construis la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$. (0,75pt)

Exercice 4 (8pts)

Dans le plan (P) rapporté au repère orthonormé direct (O, I, J), d'unité graphique 2 cm, on donne les points A(2; 0), B(1; $\sqrt{3}$) et C(-2; 0). Les points D et E sont respectivement les symétriques de B par rapport à (OA) et de A par rapport à (BC). Les points F et K sont tels que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{OK} = -2\overrightarrow{OB}$.

1.1. Placer soigneusement les points A, B, C, D, E, F et K dans le repère (O, I, J). (1pt)

1.2. Montrer que les droites (CE) et (CD) sont respectivement médiatrices des segments [BF] et [BK]. (1pt)

1.3. Montrer que le point C est le milieu du segment [FK]. (0,25pt)

2. Soit r et r' deux rotations d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de centres respectifs A et C. On pose : $f_1 = r' \circ r$ et $f_2 = r' \circ r^{-1}$.

2.1. Détermine l'équation normale de la bissectrice (Δ) de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ puis en déduire les coordonnées du point d'intersection Ω de (Δ) et la droite (BC). (1pt)

2.2. Donne la nature et les éléments caractéristiques de f_1 et f_2 (1,5pts)

2.3. Ecris Ω comme barycentre des points C, A et E affectés des coefficients à déterminer. (0,75pt)

2.4. Détermine puis construis l'ensemble (Γ) des points M de P tels que $MA^2 + MC^2 + ME^2 = 32$. (1pt)

3. f et g sont deux applications du plan (P) dans lui-même. L'application f applique A sur O, B sur C et C sur F. L'application g conserve A et transforme B en I et C en B.

3.1. Montre que f est une symétrie glissée puis précise ses éléments caractéristiques. (0,5pt)

3.2. Montre que g est une similitude dont on précisera le rapport. (0,5pt)

3.3. Vérifie que le système : $\begin{cases} x' = \frac{1}{4}(x - \sqrt{3}y + 6) \\ y' = \frac{1}{4}(-\sqrt{3}x - y + 2\sqrt{3}) \end{cases}$ est l'expression analytique de g. (0,5pt)