BAC 1 JUIN 2021 **Mathématiques** **Série D** **Durée 4h**

Exercice I : 3,5pts

Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 1, \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

1. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ? Justifie ta réponse. (1pt)

2. Détermine le réel a tel que la suite (v_n) de terme général $v_n = u_n + a$ soit géométrique de raison $\frac{1}{3}$ (0.5pt)

3. a. Exprime (v_n) en fonction de n. 0,5pt

b. Déduis l'expression de (u_n) en fonction de n et donne la limite de (u_n). (0,5pt + 0,25pt)

4. Calcule la somme des vingt-et-un premiers termes de (u_n). (0.75pt)

Exercice II (4,5pts)

On considère un carré ABCD de sens direct, de centre O et tel que AB = 4cm. Soit G le barycentre des points pondérés (A, 3) ; (B, 2) ; (C, 3) ; (D, 7). On considère I, J et L les milieux respectifs des segments $[OC], [CD]\ et [CJ]$

1.a. Montre que G appartient à la droite (BD) (0,75pt)

b. Montre que $\overrightarrow{DG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DO}$ (0,5pt)

c. Construis le point G (0,5pt)

2. on se propose de déterminer et construire l'ensemble (C) des points M du plan tel que :
$3MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2 + 2MD^2 = 160$

a. Montre que $3MA^2 + 3MC^2 = 6MO^2 + 48$ et $2MC^2 + 2MD^2 = 4MO^2 + 32$. (0,75pt + 0,75pt).

b. Montre que : M ϵ(C) si et seulement si OM = $2\sqrt{2}$ (0,5pt)

c. Justifie que le point A appartient à (C) et en déduis la nature exacte de (C). (0,25pt + 0,25pt)

d. Construis (C). (0,25pt).

PROBLEME 12pts

Soit $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to \frac{x^2+x+m}{x+1}$ où m est un paramètre réel.

1. On définit par g la fonction définie par $g(x) = \begin{cases} f(x) si\ x \neq -1 \\ -1\ si\ x = -1 \end{cases}$

a. Etudie la continuité de f_0 et celle de g en – 1. (1pt)

b. Que représente g pour f_0 ? (0,5pt)

2. Montre que pour m<0, f_m est strictement croissante. (1,25pt)

3. Montre que pour m> 0, la fonction dérivée f'_m de f_m a deux zéros distincts. (1pt)

4. Justifie que pour $m \neq 0$, la courbe C_g de g est une droite asymptote à la courbe C_{fm} de f_m. (0,75pt)

Dans la suite du problème on considère $m = 1$.

5. Etudie le sens de variation de f_1 et dresse son tableau de variation. (2,5pts).

6. Etudie la position relative des courbes de f_1 et de g. (0,5pt)

7. Construis, dans le plan muni d'un repère orthonormé, les courbes de g et de f_1. (0,75pt).

8. Donne le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $x^2 + (1-k)x + (1-k) = 0$, suivant les valeurs du paramètre réel k. (1,25pt).

9. On considère la fonction h telle que $h(x) = f_1(|x|)$.

a. Etudie la parité de h

b. Etudie la dérivabilité de h en 0

c. Sans avoir étudié les variations de h, construis sa courbe dans le même repère que la courbe de f_1. (0,5pt)

d. Explique la construction de cette courbe. (0,5pt)