BAC1 2021 ***Mathématiques*** ***Série C4*** ***Durée : 4h*** ***coef. 5***

Exercice 1 (4 pts)

ABCest un triangle rectangle isocèle en A tel que $mes\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = -\frac{\pi}{2}(2\pi)$; I milieu du segment $[BC]$. A chaque point M du segment $[BC]$, on associe le symétrique M_1 $de\ M$ par rapport à la droite (AB) et le symétrique M_2 $de\ M$ par rapport à la droite (AC). On note $P\ et\ Q$ les milieux respectifs des segments $[MM_1]\ et\ [MM_2]$.

NB. Les questions 1. et 2. peuvent être traitées indépendamment.

1. a) Montrer que A est le milieu du segment $[M_1M_2]$. (1 pt)

b) Quels sont les lieux géométriques des points M_1et M_2 lorsque M décrit le segment $[BC]$. (1 pt)

2. Soit r la rotation de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ qui transforme Q en un point Q'.

a) Quelles sont les images de A et C par r ? Que peut-on en déduire pour Q'? (1 pt)

b) Démontrer que $AQ = BQ', puis\ que\ Q' = P$. (0,5 pt)

c) En déduire que le triangle IPQ est rectangle et isocèle en I. (0,5 pt)

Exercice 2 : (5 pts)

Soit la fonction numérique f de variable réelle x, définie par : $f(x) = \frac{-2}{(x+1)(x+3)}$.

1. a) Déterminer l'ensemble de définition D de f. (0,5 pt)

b) Déterminer les nombres réels a et b tels que, pour toute valeur x de D on ait

$$f(x = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+3}. \qquad (0,5\ pt)$$

c) Etudier suivant les valeurs de x le signe de $f(x)$. (0,5 pt)

2. On considère la suite définie sur IN par son terme général : $u_n = \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+1}$.

a) Montrer que $u_n$exite et est négatif pour tout n de IN. (0,5 pt)

b) Montrer que la suite (u_n) est bornée. (0,75 pt)

c) Etudier la monotonie de la suite (u_n). (0,75 pt)

d) Soit $S_4 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4$. Calculer S_4 en donnant le résultat sous forme de fraction irréductible (on pourra utiliser l'expression de (u_n). (0,5 pt)

e) Soit $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$. Montrer que pour tout n de IN, $S_n = -\frac{3}{2} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} S_n$. (1 pt)

Problème (11 pts)

A. On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \frac{x^2-3x+9}{x^2-5x+25}$.

1. Etudier les sens de variation de f puis dresser son tableau de variation. (1,5 pts)

2. On note (C) la courbe représentative de f dans le plan munidu repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique : $\|\vec{i}\| = 1\ cm$ et $\|\vec{j}\| = 10\ cm$.

a) Tracer la courbe (C). (1 pt)

b) Démontrer que (C) coupe la droite d'équation $y = 1$ en un seul point, dont l'abscisse est notée x_0. (0,5 pt)

TSVP

B. On considère le triangle ABC tel que : $AB = 3,\ AC = 5\ et\ \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{2\pi}{3}(2\pi)$. La bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe (BC) en A'. On note Δ la demi-droite d'origine A contenant A'.

1. Donner les valeurs exactes de :
   a) $BC,\ sin\widehat{ABC}$ et $sin\widehat{BCA}$. (1,5 pts)
   b) $AA',\ BA'$ et CA' (1,5 pts)

On rappelle que si ABC est un triangle et S l'aire de ce triangle, on a :

$$\frac{BC}{sin\hat{A}} = \frac{CA}{sin\hat{B}} = \frac{AB}{sin\hat{C}} = \frac{BC \times CA \times AB}{2S}.$$

2. Soit M un point de Δ. On pose $AM = x$.

a) Montrer que $\frac{MB^2}{MC^2} = f(x)$. (0,75 pt)

b) En déduire que $\frac{MB}{MC}$ est minimal en un point M_1 de Δ et maximal en un point M_2 de Δ. (0,5 pt)

3. a) Calculer $sin\widehat{M_1BC}$ en considérant le triangle M_1BC. (0,5 pt)

b) En déduire la distance de M_1 à la droite (BC) . (0,5 pt)

c) En déduire que le point M_1 est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC. (0,75 pt)

d) Démontrer que le triangle BM_1M_2 est rectangle. (0,5 pt)

e) Démontrer que le cercle de centre M_2 tangent à la droite (AB) est aussi tangent aux droites (AC)et(BC) .(1 pt)

3. Démontrer que le point Ω de Δ tel que $A\Omega = x_0$ (x_0 a été déterminé dans la partie A-) est le centre d'un cercle passant par $B,\ C,\ M_1\ et\ M_2$. (0,5 pt)