BAC1 – AOÛT 2020 MATHEMATIQUES SERIE D Durée : 4H COEFF : 3

Exercice 1 (4 pts)

On considère les suites $(U_n)_{n\in IN^*}$ et $(V_n)_{n\in IN^*}$ définies par :

$U_1 = 1$; $V_1 = 1$; $U_2 = 2$, pour tout $n > 1$, $U_{n+1} = \frac{U_n + U_{n-1}}{2}$ et $V_n = U_n - U_{n-1}$.

1. Calculer U_3, U_4, V_2, V_3, V_4 . (1,25 pts)
2. Montrer que pour $n \geq 2$,$(V_n)_{n\in IN^*}$ est une suite géométrique dont on déterminera les éléments. (1 pt)
3. Montrer que $U_n = V_1 + V_2 + V_3 + \ldots + V_n$. Calculer U_n en fonction de n . (1,25 pts)
4. En déduire que $(U_n)_{n\in IN^*}$ est une suite convergente et calculer sa limite. (0,5 pt)

Exercice 2 (4 pts)

1. S est la symétrie centrale de centre A . Quelle est la transformation SoS ? (0,5 pt)
2. A et B sont deux points distincts ; S_A est la symétrie centrale de centre A , S_B est la symétrie centrale de centre B . M est un point quelconque. On pose :
   $N = S_A(M)$ et $M' = S_B(N)$.
   a) Faire une figure. (0,5 pt)
   b) Montrer que $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{AB}$. Puis conclure sur la nature de $f = S_B o S_A$. (1 pt)
3. Indiquer sans calcul la nature de $g = S_A o S_B$. (0,5 pt)
4. Trouver l'application gof . (0,5 pt)
5. $\vec{u}$ est un vecteur non nul, A est un point. t est la translation de vecteur $\vec{u}$ et S la symétrie centrale de centre A . En utilisant les questions précédentes, trouver :
   a) une transformation f telle que $t = foS$; (0,5 pt)
   b) une transformation g telle que $t = Sog$. (0,5 pt)

Problème (12 pts)

I Soit le polynôme $A(x) = 4x^3 - 26x^2 + 48x - 18$.

1. Calculer $A(1)$; $A(3)$. (0,5 pt)
2. Résoudre dans IR l'équation $A(x) = 0$. (0,75 pt)

II. Soit (γ) la courbe d'équation $y = \frac{-x^2+ax+b}{cx+5}$ dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Déterminer les nombres réels non nuls a, b et c sachant que :

- La droite d'équation $x = \frac{5}{2}$ est asymptote à (γ) ;
- (γ) passe par le point B de coordonnées $(2; 1)$;
- (γ) admet en B une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -\frac{3}{2}x + 1$.

…/…

(1,5 pts)

III. On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{2x^2-x-8}{4x-10}$$

On appelle (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition E de f. (0,5 pt)
2. Trouver trois réels α, β et μ tels que $f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\mu}{2x-5}$. (0,75 pt)
3. Calculer les limites de f aux bornes de E. (1 pt)
4. Démontrer que (C) admet deux asymptotes dont on donnera les équations. (0,75 pt)
5. Démontrer que le point d'intersection des asymptotes est un centre de symétrie de la courbe (C) . (0,75 pt)
6. Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation. (1,25 pts)
7. On note (P) la parabole d'équation : $y = -x^2 + 4{,}5x - 1$.
   Donner les caractéristiques de (P) . (1 pt)
8. Démontrer que (C) et (P) ont deux points communs dont on donnera les coordonnées et qu'en l'un de ces points, elles ont une tangente commune. (1,25 pts)
9. Tracer (C) et ses asymptotes, (P) ainsi que la tangente commune à (C) et à (P) . (2 pts)