BAC1 – AOÛT 2020 MATHEMATIQUES SERIE C4, Durée : 4H COEFF : 5

Exercice 1 (5 pts)

Soit un triangle équilatéral ABC dont la mesure du côté est a, a est un réel strictement supérieur à zéro. Soit O le centre du cercle circonscrit à ce triangle.
Soit x un nombre réel. On considère l'application

$$f : \mathcal{P} \longrightarrow IR$$
$$M \longmapsto \frac{sin3x}{sinx}MA^2 + \frac{cos3x}{cosx}MB^2 - 2MC^2$$

1. Calculer en fonction de a le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC. (0,5 pt)
2. Déterminer l'ensemble D des nombres réels x pour lesquels f existe. (0,5 pt)
3. Calculer $f(O)$ puis montrer que pour tout réel $x\ de\ D,\ f(O) = \frac{2a^2}{3}(2cos2x - 1)$. (0,75 pt)
4. Déterminer l'ensemble E des nombres réels x tels que les points A, B, C affectés des coefficients respectifs $\frac{sin3x}{sinx}, \frac{cos3x}{cosx}, -2$ admettent un barycentre G. (0,75 pt)
5. Dans cette question on choisit $x = \frac{\pi}{4}$.
   a) Soit I le point du plan tel que $\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Montrer que le point C est le milieu du segment $[AI]$. (0,5 pt)
   b) Déterminer G pour cette valeur de $x$puis montrer que G est le milieu du segment $[BI]$. (0,5 pt)
   c) Déterminer et construire l'ensemble Kdes points Mdu plan tels que $MA^2 - MB^2 - 2MC^2 = -\frac{2}{3}a^2$.
   Déterminer les éléments caractéristiques de l'ensemble K. (1,5 pts)

Exercice 2 (3,5 pts)

$\mathcal{C}_1\ et\ \mathcal{C}_2$sont deux cercles de même rayon, tangents extérieurement en T. A est le centre de $\mathcal{C}_1$, B celui de $\mathcal{C}_2$. Γest le cercle de diamètre $[AB]$, la perpendiculaire en T à (AB) coupe $\Gamma\ en\ I\ et\ J$. I est le point tel que le triangle IAB est rectangle direct en I.
Mestunpoint de $\mathcal{C}_1\ et\ N$ un point de $\mathcal{C}_2$ tels que :

$$mes\left(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}}\right) = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi).$$

1. a) Faire une figure. (0,5 pt)
   b)Préciser la rotation r d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme $A\ en\ B$. (0,75 pt)
   c) Montrer que $r(M) = N$ et en déduire que lorsque M décrit le cercle $\mathcal{C}_1$, la médiatrice de $[MN]$ passe par un point fixe, indépendant de $M\ et\ N$. (0,75 pt)
2. N' est le point de $\mathcal{C}_2$diamétralement opposé à N.
   a) Montrer que $mes\left(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN'}}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$. (0,75 pt)
   b) En utilisant une rotation r' d'angle $-\frac{\pi}{2}$, montrer que la médiatrice de $[MN']$ passe par un point fixe. (0,75 pt)

Problème (11,5 pts)

On considère la fonction numérique f_m de la variable réelle x définie par :

…/…

$f_m(x) = \frac{x^2+2x+m}{2(x+1)}$, où m est un paramètre réel.

On note (C_m) la courbe représentative de f_m dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition Dde f_m. (0,25 pt)
2. Définir la courbe (C_1) *de* f_1. (0,5 pt)

Dans la suite du problème, on suppose $m \neq 1$.

3. Calculer, éventuellement suivant les valeurs de m, les limites de f_m aux bornes de D. (1,5 pts)
4. a) Déterminer les nombres réels a, b *et* c tels que :
   Pour tout réel *de* D, $f_m(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$. (0,75 pt)

   b) Démontrer que (C_m) admet deux asymptotes indépendantes de m, préciser leurs équations. (0,75 pt)
5. Etudier, suivant les valeurs de m, le sens de variation de f_m. (1,5 pts)
6. Démontrer que le point $A(-1; 0)$ est un centre de symétrie de (C_m). (0,5 pt)
7. Soit k un réel et (Δ_k) la droite de coefficient directeur$k$ et passant par le point A.

   a) Discuter suivant les valeurs de m *et* k les points communs de (Δ_k) *et de* (C_m). (1,75 pts)

   b) On prend $k > \frac{1}{2}$. Soit m_1, m_2 deux réels donnés strictement supérieurs à 1.
   Démontrer que (C_{m_2}) est l'image de (C_{m_1}) par une homothétie de rapport positif et de centre A. Préciser le rapport de cette homothétie. (1 pt)
8. Soit $m = 4$.

   a) Dresser le tableau de variation de f_4. (0,5 pt)

   b) Représenter (C_4) ainsi que ses asymptotes (unité graphique 1 cm). (1,5 pts)
9. Sans aucun calcul, tracer dans le repère précédent la courbe(C_{13})à partir de (C_4). (1 pt)