BAC1- MAI 2019 **Mathématiques C4** *Durée : 4h Coeff : 5*

Exercice 1 (3 pts)

Soit P le plan affine associé au plan vectoriel V. On note dans P les points $A,\ B,\ C,\ D$.
On désigne par G le barycentre des points $A,\ B,\ C$ affectés des coefficients respectifs 1, 2, 3.

1. Soit f l'application de P dans V définie par :
   $f: M \longmapsto f(M) = 3\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{AB} - \lambda\overrightarrow{MD}$ où λ est un paramètre réel donné.
   a) Déterminer λ pour que f soit une application constante. (0,5 pt)
   b) Soit $\vec{u}$ un vecteur de V, quel est l'ensemble des points M de P tels que $f(M) = \vec{u}$ lorsque λ varie ? (1,25 pts)
2. Soit g l'application de P dans IR définie par :
   $g: M \longmapsto g(M) = MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2 - 6MD^2$.
   Quel est l'ensemble des points M de P tels que :
   $g(M) = GA^2 + 2GB^2 + 3GC^2$. (1,25 pts)

Exercice 2 (6 pts)

Dans le plan, on considère le carré $ABCD$ de centre O et tel que $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

Les points $M,\ N,\ P\ et\ Q$ sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]\ et\ [DA]$. les droites $(AN)\ et\ (MD)$ se coupent en E ; $(AN)\ et\ (BP)$ se coupent en F ; $(BP)\ et\ (CQ)$ se coupent en G ; $(CQ)\ et\ (DM)$ se coupent en H.

1. Soit r la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
   a) Déterminer l'image par r du point N, puis celle du segment $[AN]$.
   Déterminer l'image par r du point P, puis celle du segment $[BP]$.
   En déduire $r(F)$ et la nature du triangle FOG. (1,5 pts)
   b) Déterminer de même $r(G)\ et\ r(H)$. (2 pts)
   c) En déduire que $EFGH$ est un carré. (0,25 pt)
2. a) Justifier les égalités $AE = EH = DH\ et\ AE = 2QH$. (1 pt)
   b) Soit K l'image de H par la symétrie s de centre Q.
   Démontrer que $AEHK$ est un carré et comparer son aire à celle du triangle AED. (0,75 pt)
   c) En déduire le rapport entre les aires des carrés $ABCD\ et\ EFGH$. (0,5 pt)

Problème (11 pts)

A. Soit f la fonction numérique de variable réel x définie par : $x \longmapsto f(x) = \frac{4x^2+4x+1}{4-4x}$.

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$

1. a) Déterminer l'ensemble de définition de f. (0,25 pt)
   b) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. (1 pt)
2. a) Déterminer les nombres réels $a, b\ et\ c$ tels que pour tout réel $x\ de\ D$,

$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$, (0,75 pt)

b) Déduire que $(\mathcal{C})$ admet une asymptote oblique (Δ) puis préciser l'autre asymptote. (0,75 pt)

3. a)Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation. (1,5 pts)
   b) Tracer $(\mathcal{C})$ainsi que ses asymptotes. (1,5 pts)
   c) Démontrer que $(\mathcal{C})$admet un centre de symétrie à préciser. (0,5 pt)

4. Trouver le réelx_0 pour lequel la tangente à C au point d'abscisse x_0 passe par le point de coordonnées $\left(1; \frac{3}{2}\right)$. (0,75 pt)

B. On considère la fonction numériqueφ de la variable réel x, définie par :

$\varphi(x) = -sinx - 2 - \frac{9}{4sinx-4}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de φ . (0,5 pt)
2. Pour tout réel x de D , calculer$\varphi(\pi - x)$.
   Expliquer comment l'étude du sens de variation de la restriction de φ à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ permet de construire la courbe représentative de φ . (1 pt)
3. Soit φ' la fonction dérivée de φ et f' celle de f .
   a) Prouver que pour tout x de D, $\varphi'(x) = f'(sinx)cosx$. (0,25 pt)
   b) Etudier les variations de la restriction de φ à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. (1 pt)
   c) Tracer la courbe représentative de φ dans un repère orthonormé. (unité graphique 2 cm). (1,25 pt)