BAC1 – AOÛT 2018 MATHEMATIQUES Série D Durée : 4h Coeff : 3

Exercice 1 (4,5 pts)

Soit a un paramètre réel différent de $\frac{1}{3}$ et (U) la suite numérique définie par :

$U_0 = a \ et \ U_{n+1} = \frac{3U_n+7}{3U_n-1}$.

1. Déterminer les nombres réel $b \ et \ c$ tels que :
   Pour tout entier naturel$n$, $U_{n+1} = b + \frac{c}{3U_n-1}$. (0,5 pt)
2. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles (U) est une suite constante. (0,75 pt)
   Dans la suite de l'exercice, on prend $U_0 = 3$ et on considère la suite (V) définie par :
   $V_n = \frac{3U_n-7}{3(U_n+1)}$.
3. Calculer $V_0, V_1 \ et \ V_2$. (0,75 pts)
4. a) Montrer (V) est une suite géométrique dont on précisera la raison. (0,75 pt)
   b) Calculer V_n en fonction de n puis en déduire U_n en fonction de n. (0,75 pt)
5. a) Montrer que (V) est une suite convergente et calculer sa limite. (0,5 pt)
   b) La suite (U) est-elle convergente ? Si oui, préciser sa limite. (0,5 pt)

Exercice 2 (4 pts)

ABCest un triangle rectangle tel que :

$Mes(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = -\frac{\pi}{2}$, $AB = a\sqrt{3} \ et \ BC = a$;oùa est un réel strictement positif.

1. Déterminer et construire le barycentre G des points $(A, -1)$; $(B, 1)$; $(C, -1)$. (0,5 pt)
2. a) Calculer$GA^2, GB^2 et \ GC^2$. (0,75 pt)
   b) Déterminer et construire l'ensemble (γ) des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 + MC^2 = 4a^2$. (0,5 pt)
3. On note$J$, le milieu de $[AC]$. Déterminer et construire l'ensemble (γ') des points M du plan tels que :$(-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = -a^2$. (0,75 pt)
4. Soit g_m l'application du plan dans le plan qui à tout point M associe le point M' tel que$m\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ où $m \in IR^*$.
   a) Quelle est la nature de $g_m \ pour \ m = 1$. (0,25 pt)
   b) Pour $m \in IR^* \setminus \{1\}$, montrer que g_m est une homothétie dont on précisera les éléments caractéristiques. (0,75 pt)
   c) Pour $m = \frac{2}{3}$, déterminer et construire l'ensemble (γ'') image de (γ) par $g_{\frac{2}{3}}$. (0,5pt)

Problème (11,5 pts)

On considère la fonction numérique f, de la variable réel x, définie par $f(x) = \frac{-x^2+2x+3}{x+2}$. On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé$(O; \vec{i}, \vec{j})$

1. a) Déterminer l'ensemble de définition D de f. (0,25 pt)

…/… T.S.V.P

b) Calculer les limites de f aux bornes de D. (1 pt)

2. a) Déterminer les nombres réels $a, b\ et\ c$ tels que :

   $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}, \quad \forall x \in D.$ (0,75 pt)

   b) Déduire que $(\mathcal{C})$admet une asymptote oblique(Δ) puis préciser l'autre asymptote. (0,75 pt)

   c) Déterminer les coordonnées du point J, intersection des asymptotes. (0, 25 pt)

   d) Montrer que le point $\Omega(-2; 6)$ est le centre de symétrie de $(\mathcal{C})$. (0,5 pt)

3. Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation. (1,25 pts)

4. a)Déterminer les points de $(\mathcal{C})$ en lesquels les tangentes sont parallèles à la droite d'équation $y - 4x + 3 = 0$. (1 pt)

   b) Donner l'équation des tangentes $(T_1)\ et\ (T_2)$ à la courbe $(\mathcal{C})$ aux points d'abscisses respectives $x = -1\ et\ x = -3$. (0,5 pt)

5. a) Déterminer les points d'intersections de $(\mathcal{C})$ avec les axes du repère. (0,75 pt)

   b) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ et les tangentes $(T_1)\ et\ (T_2)$. (2 pts)

6. Discuter graphiquement suivant les valeurs du nombre réel m le nombre de points d'intersection de $(\mathcal{C})$et de la droite(D_m)d'équation $y = 4x + m$. (1 pt)

7. Soit h la fonction définie par $h(x) = \frac{x^2+2x-3}{x-2}$.

   a) Déterminer l'ensemble de définition $D_h\ de\ h$. (0,25 pt)

   b) Comparer $h(-x)\ et\ f(x)\ pour\ x\ de\ D_h$. (0,25 pt)

   c) Expliquer comment obtenir la courbe $(\mathcal{C}')$à partir de $(\mathcal{C})$. (0,25 pt)

   d) Construire $(\mathcal{C}')$dans le repère précédent. (0,75 pt)