BAC1-MAI 2016 MATHEMATIQUES D Durée : 4h Coeff : 3

EXERCICE I **(05 pts)**

1. Résoudre l'équation : $t \in IR, 8t^4 - 10t^2 + 3 = 0.$ (1,5 pts)
2. Pour tout nombre réel x, montrer que $cos3x = 4cos^3x - 3cosx.$ (1 pt)
3. Soit l'équation (E): $x \in IR, cos^2x + cos^22x + cos^23x = 1.$
   a. Montrer que résoudre cette équation revient à résoudre le système : (1 pt)
   $$\begin{cases} cosx = u \\ 16u^6 - 20u^4 + 6u^2 = 0 \end{cases}$$
   b. En déduire les solutions de l'équation (E). (1,5 pts)

EXERCICE II **(04 pts)**

Afia vendu un appareil électroménager pour 400 000 F. Elle place son argent à un taux de 5 % avec intérêts composés (c'est-à-dire l'intérêt produit au cours d'une année s'ajoute au capital de l'année pour devenir le capital de l'année suivante) et ne retirer chaque année que 40 000 F pour subvenir à ses petits besoins.

Les retraits et les calculs d'intérêts sont effectués chaque 1er janvier.

On appelle P_n le montant du placement d'Afi chaque 1er janvier en prenant pour n le nombre d'années écoulées. On a $P_0 = 360\ 000\ F.$

1. Calculer $P_1,\ P_2,\ P_3$. (0,75 pt)
2. Démontrer que $P_{n+1} = 1{,}05P_n - 40\ 000.$ (0,75 pt)
3. On pose $u_n = P_n - 800\ 000.$
   Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. (1 pt)
4. En déduire une expression de u_n en fonction de n, puis de P_n en fonction de n. (1 pt)
5. Que conseiller à Afi ? (0,5 pt)

PROBLEME **(11 pts)**

Soit f la fonction définie sur $IR\backslash\{-1\}$ par : $f(x) = \frac{x^3+3x^2+5x+5}{(x+1)^2}$.

1. Déterminer les réels $a, b, c\ et\ d$ tels que : pour tout $x\ de\ IR\backslash\{-1\}$,
   $f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{(x+1)^2}$. (1 pt)
2. Déterminer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition de f. (0,75 pt)
3. On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x + 1$.
   a. Démontrer que la droite $\mathcal{D}$ est une asymptote à la courbe $\mathcal{C}$. (0,5 pt)
   b. Etudier la position de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{D}$. (0,5 pt)
4. Calculer la dérivée $f'de\ f$ et démontrer que $f'(x) = \frac{(x-1)(x^2+4x+5)}{(x+1)^3}$. (0,5 pt)
5. Etudier le sens de variation de f, puis dresser le tableau de variation de f. (1 pt)

T.S.V.P …/…

6. Déterminer les coordonnées du point A en lequel la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ est parallèle à la droite d'équation $y - x - 1 = 0$.
   Déterminer une équation de cette tangente. (1,25 pts)
7. a) Construire $\mathcal{C}$, ses asymptotes ainsi que la tangente $\mathcal{T}$. (2 pts)
   b) Déterminer graphiquement, suivant les valeurs du nombre réel k, le nombre de point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}_k$ d'équation $y = x + k$.
   Retrouver ces résultats par le calcul. (2 pts)
8. a) Démontrer que : pour tout réel > 0, $0 < f(x) - (x+1) < \frac{2}{x}$. (0,75 pt)
   b) Sans utiliser une calculatrice, donner une valeur approchée de $f(10^6)$, en précisant s'il s'agit d'une valeur approchée par excès ou par défaut et en donnant un majorant de l'erreur commise. (0,75 pt)